B A B II

MATERI PENUNJANG

2.1 PERSAMAAN DIFFERENSIAL (P D)

Bentuk umum dari persamaan differensial orde n dengan ruas kanan merupakan PD orde 0 adalah:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t), .(1)$$

atau dapat ditulis menjadi:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = x(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

dengan a_i(i= 0,1,2,....,n) merupakan koefisien-koefisien konstanta-konstanta,

y(t) dan x(t) adalah variabel tak bebas, sedang t adalah variabel bebas.

Dengan mendefinisikan operator differensial D $= \frac{d}{dt}$, maka untuk orde ke-n:

$D^n = \frac{d^n}{dt^n}$, maka PD (1) dapat dituliskan menjadi:

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \ldots + a_1 Dy + a_0 y = x(t)$$

atau

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0) y = x(t) \ldots (3)$$

Polinom dalam D

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$$

disebut polinom karakteristik. Sedang persamaan

persamaan karakteristik.

Contoh:

Persamaan differensial $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = x(t)$

Polinom karakteristiknya adalah $D^2 + 3D + 2$,

dan persamaan karakteristiknya adalah

$D^2 + 3D + 2 = 0$ atau

$(D + 1) (D + 2) = 0$ yang mempunyai dua jawaban

yaitu $D = -1$ dan $D = -2$

Bentuk dari PD linier orde n dan dengan ruas kanan merupakan PD orde m adalah:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_o y(t) =$$

$$b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_o\, x(t)$$

atau dapat ditulis menjadi:

$$\sum_{i=o}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=o}^{m} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$$

2.2 PENERAPAN TRANSFORMASI LAPLACE UNTUK PENYELESAIAN PD BIASA LINIER DENGAN KOEFISIEN KONSTANTA.

Misalkan f(t) adalah suatu fungsi riel dari variabel riel t yang didefinisikan untuk t > 0, maka:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \lim_{\substack{T \to \infty \\ \epsilon \to 0}} \int_{\epsilon}^{T} f(t)\, e^{-st} dt$$

$$= \int_{0^+}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

$$0 < \epsilon < T$$

disebut transformasi Laplace dari f(t), dengan s adalah suatu variabel kompleks dan variabel t menyatakan waktu. Sebagai contoh transformasi Laplace dari $f(t) = e^{-t}$ adalah

$$\mathcal{L}\left[e^{-t}\right] = \int_{0^+}^{\infty} e^{-t}\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{0^+}^{\infty} e^{-(s+1)t} dt$$

$$= -\frac{1}{s+1} e^{-(s+1)t} \Big|_{0^+}^{\infty}$$

$$F(S) = \frac{1}{s+1}$$

Jika transfomasi Laplace suatu fungsi f(t). adalah F(s), atau dapat dituliskan dengan:

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, maka f(t) disebut suatu transformasi Lapace Invers dari F(s) dan secara simbolis ditulis $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$. Seperti pada contoh di atas, transformasi Laplace Inversnya adalah:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = e^{-t}$$

Transformasi Laplace dan inversnya memiliki sifat-sifat penting yang dapat menguntungkan dalam penyelesaian persamaan differensial koefisien konstanta linier, yaitu:

Sifat 1. Jika $F_1(s)$ dan $F_2(s)$ masing-masing merupakan transformasi Laplace dari $f_1(t)$ dan $f_2(t)$, maka $a_1F_1(s)+ a_2 F_2(s)$ adalah tansformasi Laplace dari $a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$, dengan $a_1$dan a_2 adalah konstanta sembarang.

Sifat 2. Jika $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ masing-masing adalah transformasi Laplace Invers dari $F_1(s)$ dan $F_2(s)$, maka $b_1f_1(t)+b_2f_2(t)$ adalahtransformasi Laplace Invers darib$_1F_1(s)+b_2F_2(s)$, dengan b_1 dan b_2 adalah konstanta sembarang.

Untuk membantu dalam teknik perluasan pecahan parsial, ada tabel transformasi Laplace, yaitu::

FUNGSI WAKTU	TRANSFORMASI LAPLACE
Denyut satuan $\partial(t)$	1
Pangkat e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Gelombang sinus sin w(t)	$\frac{w}{s^2+w^2}$
Gelombang cosinus cos w(t)	$\frac{s}{s^2+w^2}$
Tangga satuan u(t) = 1	$\frac{1}{s}$
Tanjakan satuan t	$\frac{1}{s^2}$
Polinom t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

Tabel diambildari buku "Feed back and Control System", Yoseph I.D, halaman 60

Transformasi Laplace Invers dapat digunakan di dalam menentukan jawaban penyelesaian sebuah persamaan differensial biasa linier dengan koefisien konstanta. Berikut ini bentuk umum transformasi Laplace Invers dengan menggunakan perluasan pecahan parsial

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[b_n + \sum_{i=0}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{C_{ik}}{(s+p_i)^k}\right]$$

$$= b_n\ \partial(t) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{C_{ik}\ t^{k-1}\ e^{-p_i t}}{(k-1)!} \qquad (5)$$

dengan $\partial(t)$ = fungsi denyut satuan, $b_n = 0$ kecuali jika $m = n$.

Transformasi Laplace Invers dari fungsi $F(s) = \dfrac{s^2 + 2s + s}{(s+1)(s+2)}$ diberikan oleh

$$\mathscr{L}^{1}\left[\frac{s^2+2s+s}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}[\ 1\ ] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$= \partial(t) + e^{-t} - e^{-2t}$$

Contoh Transformasi Laplace Invers dari fungsi

$F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2(s+1)}$ adalah:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+2)}\right]$$

$$= -\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] + 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$= -e^{-t} + t\,e^{-t} + e^{-2t}$$

Ada dua persamaan umum, yaitu:

Yang pertama berbentuk

$$\sum_{i=o}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = X(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 6\ )$$

dengan $y = y(t)$. Sedangkan a_i dengan $i = 0,1,2,\ldots,n-1)$ merupakan konstanta-konstanta dan $a_n = 1$. Syarat-syarat awal untuk persamaan ini dituliskan sebagai $\left.\frac{d^k y}{dt^k}\right|_{t=0^+} = y_o^k$, $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ dengan y_o^k merupakan konstanta-konstanta.

Transformasi Laplace dari turunan $\frac{d^i y}{dt^i}$ adalah

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^i y}{dt^i}\right] = S^i\ Y(s) - \sum_{k=o}^{i-1} S^{i-1-k} y_o^k, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 7\ )$$

untuk $i > 0$, dengan $Y(s) = \mathscr{L}\left[\ Y(t)\right]$ dan $y_o^k = \left.\frac{d^k y}{d\ t^k}\right|_{t=0^+}$

Maka transformasi Laplace dari persamaan (6) adalah =

$$\sum_{i=o}^{n} \left[\ a_i\ (\ S^i Y(s) - \sum_{k=o}^{i-1} S^{i-1-k}\ y_o^k\ )\ \right] = x(s) \ldots(8)$$

$$Y(s) = \frac{x\ (\ s\ )}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i} + \sum_{i=o}^{n} \sum_{k=o}^{i-1} \frac{a_i s^{i-1-k}\ \ y_o^{\ k}}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i} \ldots\ldots\ (\ 9\ )$$

Sehingga penyelesaian dari persamaan (6) adalah:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{X(s)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} + \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{a_i s^{i-1-k} \cdot y_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \right]$$

....(10)

Diberikan persamaan defferensial

$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = x(t)$, dengan X (t) = tangga satuan,

dan syarat-syarat awal $y(0^+) = -1$, dan $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^+} = 2$

Penyelesaiannya sebagai berikut:

Diketahui $n = 2$, $y(0^+) = y_0^0 = -1$, $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^+} = y_0^1 = 2$

$a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$

Maka transformasi Laplace dari persamaan differensial tersebut adalah:

$$\sum_{i=0}^{2} \left[a_i \left(S^i\, Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} S^{i-1-k} y_0^k \right) \right] = x(s)$$

Untuk i = 0

$a_0[\, s^0\, Y(s)\,] = 2\, Y(s)$

Untuk i = 1

$$a_1\left(s^1\, Y(s) - \sum_{k=0}^{0} s^{-k}\, y^k \right) = a_1[\, sY(s) - s^0\,]$$

$$= 3\,[\, sY(s) + 1\,]$$

Untuk i = 2

$$a_2\ (\ s^2\ Y(s) - \sum_{k=0}^{1} s^{1-k} y_0^k\ ) = a_2(s^2 Y(s) - s\ y_0^0\ - s^0 y_0^1\ )$$

$$= 1\ (s^2\ Y(s)\quad s - 2\ )$$

Diperoleh $\sum_{i=0}^{2} a_i (s^i\ Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k}\ y_0^k\ ) =$

$$2\ Y(s) + 3\ [\ sY(s) + 1\ ] + 1\ [\ s^2\ Y(s) + s - 2\ ] = \frac{1}{s}$$

atau

$$(s^2 + 3s + 2)\ Y(s) = -\frac{(\ s^2 + s - 1)}{s}$$

$$Y(s) = -\frac{(\ s^2 + s - 1\ )}{s\ (s^2 + 3s + 2\ )}$$

Dengan teknik perluasan pecahan parsial diperoleh

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{2(s + 2\ )}$$

sehingga penyelesaian persamaan differensialnya adalah:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\ Y(s)\ ]$$

$$= \frac{1}{2}\ \mathcal{L}^{-1}\left|\frac{1}{S}\ \right| - \ \mathcal{L}^{-1}\left|\frac{1}{S+1}\right| - \frac{1}{2}\ \mathcal{L}^{-1}\left|\ \frac{1}{S + 2}\ \right|$$

$$= \frac{1}{2}(\ 1 - 2e^{-t} - e^{-2t}\ ),\quad t > 0$$

Persamaan yang kedua berbentuk

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x}{dt^i} \qquad ....(\ 11\ )$$

dengan y = y(t), dan x = x(t) a_i dan b_i adalah koefisien koefisien konstanta, dan $m \leq n$

Transformasi Laplace dari persamaan (11) diberikan oleh

$$\sum_{i=o}^{n} \left| a_i (s^i Y(s) - \sum_{k=o}^{i-1} s^{i-1-k} y_o^k) \right|$$

$$= \sum_{i=o}^{m} \left[b_i (s^i X(s) - \sum_{k=o}^{i-1} s^{i-1-k} x_o^k) \right] \quad \ldots\ldots(12)$$

dengan $\quad x_o^k = \left. \dfrac{d^k x}{dt^k} \right|_{t=0^+}$

Maka

$$Y (s) = \left[\frac{\sum_{i=o}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i} \right] x(s) - \frac{\sum_{i=o}^{m} \sum_{k=o}^{i-1} b_i s^{i-1-k} x_o^k}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i}$$

$$+ \sum_{i=o}^{n} \sum_{k=o}^{i-1} \frac{a_i s^{i-1-k} y_o^k}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i} \quad \ldots\ldots(13)$$

Sehingga penyelesaian umum dari persamaan (11) adalah

$$y (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sum_{i=o}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i} x(s) - \frac{\sum_{i=o}^{m} \sum_{k=o}^{i-1} b_i s^{i-1-k} x_o^k}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i} \right]$$

$$+ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sum_{i=o}^{n} \sum_{k=o}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y_o^k}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i} \right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

Diberikan persamaan differensial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{dx}{dt} + 3x$$

Syarat awalnya adalah:

$y_o^o = 1$, $y_o^1 = 0$, $x(t) = e^{-4t}$

Penyelesaiannya adalah:

Diketahui $n = 2$, $a_o = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$

$m = 1$, $b_o = 3$, $b_1 = 1$,

$x_o^o = \lim e^{-4t} = 1$

$y_o^o = 1$, $y_o^1 = 0$, $x(t) = e^{-4t}$

Dari persamaan (13), yaitu:

$$Y(s) = \left[\frac{\sum_{i=o}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i}\right] x(s) - \frac{\sum_{i=o}^{m}\sum_{k=o}^{i-1} b_i s^{i-1-k} x_o^k}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i}$$

$$+ \sum_{i=o}^{n}\sum_{k=o}^{i-1} \frac{a_i s^{i-1-k} y_o^k}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i}$$

$$Y(s) = \left[\frac{\sum_{i=o}^{1} b_i s^i}{\sum_{i=o}^{2} a_i s^i}\right] x(s) - \frac{\sum_{i=o}^{1}\sum_{k=o}^{i-1} b_i s^{i-1-k} x_o^k}{\sum_{i=o}^{2} a_i s^i}$$

$$+ \frac{\sum_{i=o}^{2}\sum_{k=o}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y_o^k}{\sum_{i=o}^{2} a_i s^i}$$

$$\sum_{i=0}^{1} b_i s^i = b_0 s^0 + b_1 s^1 = 3\ s^0 + 1\ s^1 = s + 3$$

$$\sum_{i=0}^{2} a_i s^i = a_0 s^0 + a_1 s^1 + a_2 s^2 = 2s^0 + 3s^1 + 1s^2$$

$$= s^2 + 3s + 2$$

$$x(s) = \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-4t} \right) = \frac{1}{s+4}$$

Jadi

$$\left[\frac{\sum_{i=0}^{1} b_i s^i}{\sum_{i=0} a_i s^i} \right] x(s) = \left[\frac{s+3}{s^2 + 3s + 2} \right] \left[\frac{1}{s+4} \right]$$

Untuk i = 1

$$\sum_{k=0}^{0} b_1\ s^{-k}\ \ x^k = b_1 s^0\ x_0^0 = 1.s^0.\ 1 = 1$$

Jadi

$$\frac{\sum_{i=0}^{1} \sum_{k=0}^{i-1} b_i\ s^{i-1-k}\ x_0^k}{\sum_{i=0}^{2} a_i s^i} = \frac{1}{s^2 + 2s + s}$$

$$* \sum_{i=0}^{2} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{a_i s^{i-1-k}\ y_0^k}{\sum_{i=0}^{2} a_i s^i} =$$

Untuk i = 1

$$\sum_{k=o}^{o} \frac{a_1 s^{-k}\; y_o^k}{\sum_{i=o}^{2} a_i s^i} = \frac{a_1 s^o y_o^c}{\sum_{i=o}^{2} a_i s^i} = \frac{3.1.1}{s + 3s^2 + 2} = \frac{3}{s + 3s^2 + 2}$$

Untuk i = 2

$$\sum_{k=o}^{1} \frac{a_2 s^{1-k} y_o^k}{\sum_{i=o}^{2} a_i s^i} = \frac{a_2(s^1 y^o + s^o y_o^1)}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1(s.1 + 1.0)}{s^2 + 3s + 2}$$

$$= \frac{s}{s^2 + 3s + 2}$$

Jadi $$\sum_{io}^{2} \sum_{k=o}^{i-1} \frac{a_i s^{i-1-k}\; y_o^k}{\sum_{i=o}^{2} a_i s^i} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

$$Y(s) = \frac{s + 3}{(s^2+3s+2)(s+4)} - \frac{1}{s^2 + 3s + 2} + \frac{S + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 7s + 11}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

Selanjutnya dengan teknik perluasan pecahan parsial didapatkan:

$$Y(S) = \frac{5}{3(s+1)} - \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{6(s+4)}$$

Sehingga penyelesaian persamaan differensialnya adalah:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [Y(s)]$$

$$= \frac{5}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)} \right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+2)} \right] - \frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+4)} \right]$$

$$y(t) = \frac{5}{3} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{1}{6} e^{-4t}$$

2.3 PETA KUTUB-NOL

Fungsi-fungsi rasional F(s) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$F(s) = \frac{b_m \sum_{i=c}^{m} \frac{b_i}{b_m} s^i}{\sum_{i=o}^{n} a_i s^i} = \frac{b_m \prod_{i=o}^{m} (s + z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s + p_i)} \quad \ldots\ldots (15)$$

dengan suku-suku ($s + z_i$) merupakan faktor-faktor dari polinom pembilang dan suku-suku ($s + p_i$) merupakan faktor-faktor dari polinom penyebut, dan s merupakan variabel kompleks.

Harga-harga variabel kompleks s untuk |F(s)| menjadi nol disebut *zeros* dari F(s).

Harga-harga variabel kompleks s untuk |F(s)| menjadi tak terhingga disebut *kutub-kutub* (poles) dari F(s).

Misalnya $F(s) = \dfrac{2 s^2 - 2 s - 4}{s^3 + 5 s^2 + 8s + 6}$

yang dapat ditulis kembali menjadi:

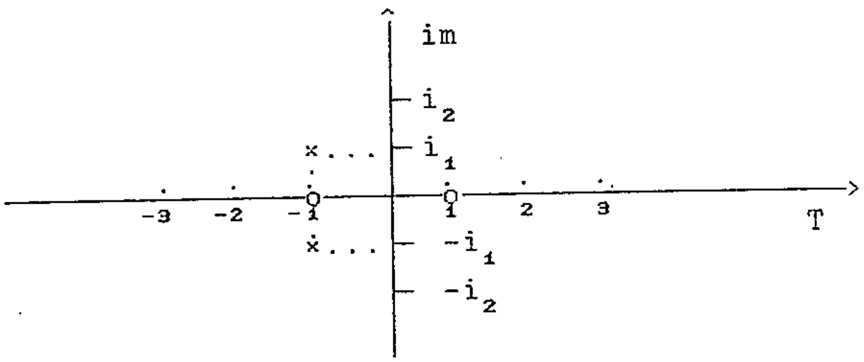
$$F(s) = \frac{2(s+1)(s-1)}{(s+3)(s+1+i)(s+1-i)}$$

Maka F(s) mempunyai zeros di s = -1, dan s = 1. F(s) mempunyai kutub-kutub di s = -3, s = -1-i, dan s= -1+i.

Tempat sebuah kutub di bidang s ditandai sebuah lambang (x), dan tempat sebuah zero di bidang s ditandai oleh sebuah lingkaran kecil (o). Bidang s yang meliputi kutub-kutub dan zeros dari F(s) disebut PETA KUTUB-NOL dari F(s).

Fungsi rasional $F(s) = \dfrac{(s+1)(s-1)}{(s+3)(\ s+1+i\ )(\ s+1-i\ )}$

mempunyai kutub -kutub di s = -3, s= -1-i, dan s = -1 + i, dan zeros di s = -1 dan s = 1. Peta kutub-nol dari F(s) diperlihatkan oleh gambar (3)



Gambar 3. Peta Kutub-Nol